جامعة بغداد
كلية العلوم للبنات
قسم الرياضيات

توزيع ويبل لمعلمة واحدة

Weibull Distribution of One Parameter

بحث تقدمت به الطالبة

اعتماد فاضل عباس

بإشراف

م.م.شيماء جاسم

1437هـ 2016م

المقدمة:

تشير كثير من الدلائل على الاهتمام بالإحصاء واستخدامه منذ زمن بعيد (العصور القديمة)، حيث أقتصر اهتمام الحكومات منذ القدم بالمعلومات الاجتماعية وذلك لأغراض التنظيم والتخطيط ، واستخدم الإحصاء في عصره الأول في جمع البيانات عن السكان وحصرهم من قبل الدولة لأهداف معينة تتمثل في استخدامهم في الجيوش أو توجيههم لتنفيذ بعض المباني أو لغرض فرض الضرائب أو لتوزيع الأراضي الزراعية على السكان بطريقة عادلة ، ويعد قدماء المصريين أول من أستخدم هذا الأسلوب. وفي القرن السابع عشر والذي يمكن اعتباره العصر الإحصائي الثاني تم استخدام الطريقة الرقمية للدلالة على الظواهر موضوع البحث على اعتبار أن هذه الطريقة أدق وأقوى في التعبير عن هذه الظواهر وتركز الهدف من هذه الطريقة في معرفة عدد السكان وعدد المواليد وعدد الوفيات ومقدار الثروة والدخل ومقدار الضرائب المحصلة وكمية الناتج من المحاصيل الزراعية.

باختصار نجد أن مجال الإحصاء قبل القرن العشرين كان مرتبطاً في الغالب بالمجالات الاقتصادية والاجتماعية المتمثلة بتعداد السكان ومعرفة خصائصهم الاجتماعية والاقتصادية، وكانت الأساليب الإحصائية المستخدمة تمتاز بالبساطة بحيث لم توفر للإحصاء الأسس والمقومات الكافية لأن يصبح علماً.

ويمكن تحديد بداية العصر الإحصائي الثالث مع تطور علوم الرياضيات في القرن الثامن عشر وظهور بعض النظريات العلمية الهامة مثل نظرية الاحتمالات التي كان لها الدور الكبير في تطور هذا العلم واكتسابه أهمية كبرى بحيث أصبح علماً مستقلاً وانتشر استخدامه وبدأ الاهتمام من قبل العلماء في تطبيق النظريات والطرق والأساليب الإحصائية في الكثير من فروع العلم الحديث كالهندسة والطب والصيدلة والزراعة والصناعة والجغرافيا والفلك وعلم النفس باعتباره الطريقة الصحيحة والأسلوب الأمثل إتباعه في البحث العلمي.

وأخيراً فقد أدى ظهور الحاسبات الآلية وتطورها في وقتنا الحالي بأنواعها المختلفة وبقدرتها الفائقة ودقتها المتناهية إلى تمهيد الطريق لاستخدام وتطبيق الأساليب الإحصائية المختلفة في شتى المجالات والميادين.

إن توزيع ويبل(Weibull distribution) يعتبر من التوزيعات المهمة وله تطبيقات كثيرة في الحياة العملية منها إستعماله في تحليلات عديدة متعلقة بعلوم وإصدارات الصحة. وكذلك في تصميم تجارب المواد المحدثة للسرطان ولدراسة معدل الإنحدار النسبي لأدوية مرضى لوكيميا الدم. بالإضافة إلى ذلك له إستخدام مهم آخر في تحليل وقياس سرعة الريح وأمواج البحار وتنظيم قوة تشتت الريح للمولدات الهوائية.

العالِم ويبل:

وُلد والودي ويبل Waloddi Weibull في 18 حزيران/يونيو 1887 في السويد. من 1904 إلى 1940، اشتغل ويبل في خفر السواحل السويدية الملكية، ومن ثم ترفّع إلى رتبة لواء. وخلال هذه الفترة درس أيضاً في المعهد الملكي للتكنولوجيا في ستوكهولم، وفي جامعة ابسالا Uppsalla حصل على درجة الدكتوراه في عام 1932. وفي عام 1941 حصل على درجة الأستاذية في أبحاث الفيزياء في المعهد الملكي للتكنولوجيا. كما عمل مهندساً استشارياً في العديد من الشركات الصناعية السويدية والألمانية، بما في ذلك شركة SAAB وبوفورز .

نشر ويبل على نطاق واسع في المجال العام للعلوم دراسات عن قوة المواد، والمواد الصلبة، وخصائص الكرة والأسطوانة والتوزيع الاحتمالي، ودرس في بحثه عن وظيفة التوزيع الإحصائي للتطبيق على نطاق واسع، الذي نشرته مجلة الميكانيكا التطبيقية في عام 1951. حاز ويبل على شعبية هائلة عن نظرية المعولية، لأنه يتضمن توزيع التناقص، والثابت، وزيادة معدلات الفشل .

تلقى يبل الميدالية الذهبية من الجمعية الأمريكية للمهندسين الميكانيكيين في عام 1972، والميدالية الذهبية الكبرى من الأكاديمية السويدية للعلوم الهندسية في عام 1978 (التي مُنحت شخصياً من الملك كارل جوستاف السادس عشر). توفي في 12 تشرين الأول/أكتوبر 1979 في أنيسي في فرنسا.

(Broberg, 1997: 142-143)

الفصل الأول

توزيع ويبل Weibull Distribution

يعتبر توزيع ويبل من التوزيعات المهمة وله تطبيقات كثيرة في الحياة العملية منها إستعماله في تحليلات عديدة متعلقة بعلوم وإصدارات الصحة، وكذلك في تصميم تجارب المواد المحدثة للسرطان ولدراسة معدل الإنحدار النسبي لأدوية مرضى لوكيميا الدم، بالإضافة إلى ذلك له إستخدام مهم آخر في تحليل وقياس سرعة الريح وأمواج البحار وتنظيم قوة تشتت الريح للمولدات الهوائية.

وهو التوزيع الأكثر فائدة في تحليلات المعولية من خلال ضبط معالم التوزيع التي تمكننا من عمل مطابقة (fit) للتوزيعات التي تُعبر عن الأوقات أو الأعمار. أول من اكتشفه العالم الفيزيائي ويبل (1939) Weibull وسمي التوزيع باسمه، واستخدمه في تحليلات المعولية بنجاح من خلال بحث نشره عن تحليل عطلات سبعة نماذج كانت تتميز بصعوبة وصف سلوك بياناتها بالتوزيعات المتداولة في ذلك الوقت. ومن المناسب القول إن توزيع ويبل يصف بشكل شامل كافة مراحل دورة حياة المعدة , فهو يصف ظاهرتي التناقص والتزايد لمعدل العطل , بالإضافة إلى ظاهرة الثبات .

التوزيع يعرف بمعلمتيه هما:

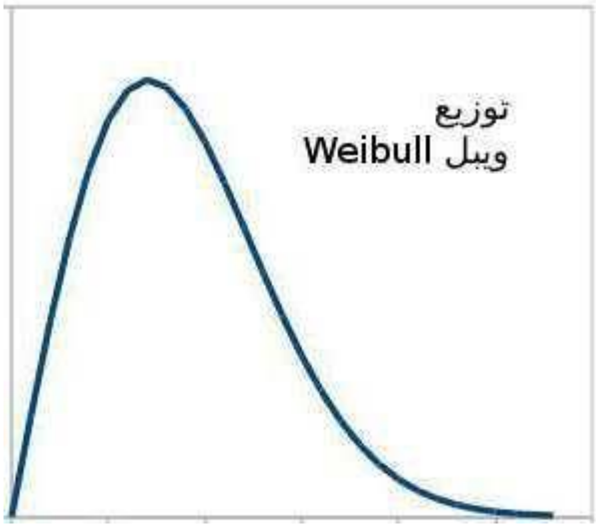
1- معلمة القياس(scale parameter α)

2- معلمة الشكل(shape parameter β).

ويعبّر عن دالة كثافة التوزيع بالمعادلة أدناه: (علي وآخرون، 2009: 367)

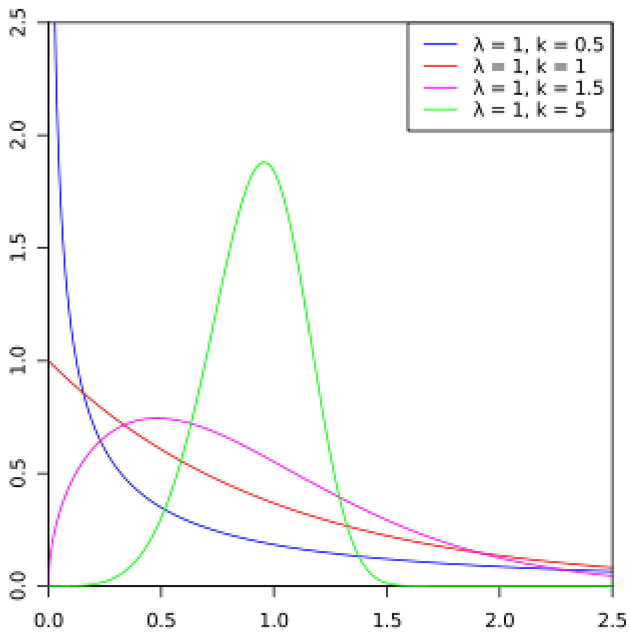
$$f(t) = \frac{\beta (t)^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} Exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right]$$

إن دراسة توزيع ويبل(Weibull Distribution) بوصفه أحد نماذج دوال الفشل وذلك لأن هذا التوزيع ملائم عندما تكون معدلات الفشل عالية نسبياً في بداية التشغيل ومن ثم تبدأ هذه المعدلات بالتناقص تدريجياً مع زيادة الزمن، وهذا مايدعى بتوزيع الباي–ويبل (Bi-Weibull) وهذا التوزيع يعطي مرونة أكثر ونتائج عالية الدقة. ويتم أيجاد المقاييس الاحصائية الاساسية وتقدير المعلمات لتوزيع باي – ويبل ذي الأربع معلمات (4-Prameter Bi-Weibull Distribution) من خلال طريقة الامكان ألاعظم (MLE) وذلك باستخدام المحاكاة بطريقة (Inverse Formula)، ومن ثم أيجاد المقاييس الاحصائية الاساسية لتوزيع باي – ويبل ذي الخمس معلمات (5-Prameter Bi-Weibull Distribution) وذلك باستخدام المحاكاة بطريقة (Inverse Formula). (الساعدي، 2007: 2)



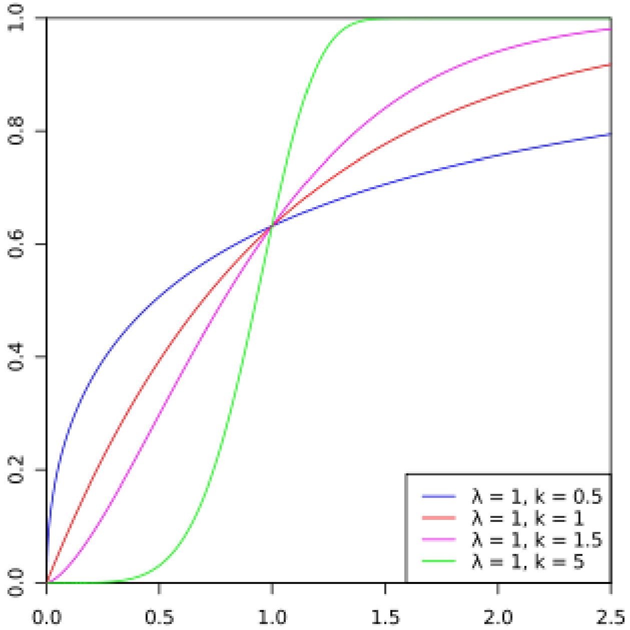
توزيع ويبل

في النظرية الاحتمالية وعلم الإحصاء، فإن توزيع ويبل هو توزيع احتمالي مستمر، وقد سُمي باسم عالم الرياضيات السويدي Waloddi Weibull ، الذي وصف ذلك بالتفصيل في عام 1951، على الرغم من اكتشافه لأول مرة من قبل فريشيه (1927) Frechet وتطبيقه لأول مرة من روسن وراملر & Rosin Rammler (1933) لوصف توزيع حجم الجسيمات. (الساعدي، 2007: 5)



دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذو المعلمتين

$$f(x;\lambda,k)=\begin{cases}\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k} & x\geq 0,\\ 0 & x<0,\end{cases}$$



دالة التوزيع التراكمي لتوزيع ويبل ذو المعلمتين

$$F(x;k,\lambda)=1-e^{-(x/\lambda)^k}$$

وتُعد مسألة تقدير المعلمات المجهولة للتوزيعات الاحتمالية، من المسائل المهمة التي حظيت وتحظى باهتمام الباحثين والمهتمين بالإحصاء الرياضي، نظراً إلى تطور طرائق التقدير وتباينها، الأمر الذي يدعو إلى دقة التقدير وإيجاد أفضل مقدر لهذه المعلمات (الساعدي، 2007: 5-7).

توزيع رايلي:

يعتبر توزيع رايلي والذي هو حالة خاصة من توزيع ويبل من التوزيعات المهمة، إذ يعتبر من أحد نماذج الفشل الشائعة في حقل المعولية واختبارات الحياة وتحليل

الإشارات. ولقد أجريت الكثير من الدراسات حول هذا التوزيع ، ففي عام 2004 استخدم الباحث .Afify,E.,E توزيع رايلي ذي المعلمتين وهما معلمة القياس ومعلمة التموضع وقارن بين مجموعة الطرائق الاعتيادية ومنها طريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وطريقة انحدار الحرف وطريقة الانحرافات الصغرى المطلقة واثبت إن الطريقة الأخيرة هي الأفضل(Afify, 2004)، وفي عام 2009 قام الباحثان-Al Nachawati,H.وAbu-Yossef,S.E. بإيجاد تقديرات بيز لدالة المعولية للبيانات المرتبة لتوزيع رايلي العام-Al-Nachawati & Abu-Youssef, 2009: 1315) (1325، وفي عام 2010 ناقش الباحثون Abd-Eiaziz و.Amin,E.A و .Sdiman,Aمشكلة التقدير البيزي وغير البيزي لمعلمة غير معروفة لتوزيع رايلي العكسي (Inverse Rayleigh Distribution) بالاعتماد على قيم مسجلة واطئة (Abd-Eiaziz et al., 2010: 3057-3066)، وفي عام 2011 قام الباحثان Sanku Dey وTanujit Dey باقتراح دالة خسارة جديدة لتقدير معلمة القياس حيث تبين ان المقدر افضل من طريقة لامكان الاعظم من خلال حجوم عينات مختلفة(Dey & Dey, 2011: 213-226) ، وفي عام 2011 استخدم الباحثون .Kumar, Aو .Singh, S و .Gupta, V.K توزيع رايلي في مجال الاتصالات اللاسلكي في تقنيات الموبايل لتمثيل القناة المستخدمة في عملية نقل المعلومات (Kumar et al., 2011)، وفي عام 2011 قام الباحثون .Chen , D.E و

.Tsai,T.R. وLio,Y.L. باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم لتقدير معلمات توزيع رايلي العام للبيانات تحت المراقبة(Chen et al., 2011: 46-57) .

توزيع ريلي ذو معلمة واحدةRayleigh distribution:

يعد توزيع ريلي حالة خاصة من توزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل $\beta = 2$، وقد أوجد هذا التوزيع من قبل العالم الانكليزي Lord Rayleigh ويستخدم في التحليلات المفردة وتحليلات الخطأ لمختلف الانظمة، وان الدالة الاحتمالية P.d.f لتوزيع ريلي ذو المعلمة الواحدة تكون حسب الصيغة الآتية:(جلوب وشفيق،2013: 319)

$$f(t;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}\, t\, e^{-\frac{t^2}{\theta}} & \underset{(0,\infty)}{I(t)}\ ,\ \theta>0\\[2ex] 0 & o.w\end{cases}$$

حيث ان θ تمثل معلمة القياس Scale parameter

وبصورة عامة ان توزيع ريلي هو احد نماذج الفشل الشائعة في حقل المعولية وعلية فأن دالة التوزيع التجميعية C.d.F ودالة المعولية تكون كماياتي:

$$F(t;\theta)=1-e^{-\frac{t^2}{\theta}}$$

$$R(t;\theta)=e^{-\frac{t^2}{\theta}}$$

الفصل الثاني

طرائق التقدير Methods of Estimators

أولاً- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method (M.L.E)

وتعتبر إحدى أهم طرائق التقدير والتي تهدف إلى جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى، فإذا كانت لدينا عينة عشوائية ($t_1,t_2,...,t_n$) تتوزع توزيعاً رايلياً بمعلمة إزاحة α ومعلمة قياس β، فان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليه باشتقاق لوغاريتم دالة الإمكان ومساواتها بالصفر، فإذا كانت (t) تتوزع توزيعاً رايلياً بمعلمتين فإن دالة الإمكان ستكون كالآتي:

$$L(t_1,t_2,\dots,t_n;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\alpha,\beta)=\beta^{-2n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\exp[-\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2/2\beta^2]$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فان المعادلة السابقة تصبح كالأتي:

$$;\ t_i>\alpha, i=1,2,\dots,n$$

$$\ln(L)=-2n\ln(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i-\alpha)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{2\beta^2}$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى α ، β ومساواتهما بالصفر نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i-n\alpha\hat{}}{\beta\hat{}^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(t_i-\alpha\hat{})}=0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha\hat{})^2}{\beta\hat{}^3}-\frac{2n}{\beta\hat{}}=0$$

وبما أن (α) هي الحد الأدنى للمتغير العشوائي (t)، لذلك فان($\ln L$) يمكن تعظيمها تحت شرط القيد الأتي:

$$\alpha\le \underset{i}{Min}(t_i)$$

(محمد، 2011: 6)

وكذلك كالآتي:-

$$f(x,\alpha,\lambda)=\begin{cases}\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ o & o.w\end{cases}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$LnL(\alpha,\lambda)=nLn(\alpha)+nLn(\lambda)+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}Ln(1-e^{-\lambda xi})-\lambda\sum_{i=1}^{n}xi$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى α ,λ ومساواتها بالصفر نحصل على المعادلات الآتية:

$$\frac{\partial LnL}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}L_n(1-e^{-\lambda xi})=0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i e^{-\lambda xi}}{(1-e^{-\lambda xi})}-\sum x_i=0$$

من المعادلتين اعلاه نحصل على مقدر (MLE) لـ α كدالة λ، وكالآتي:-

$$\hat{\alpha}(\lambda)=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}L_n(1-e^{-\lambda xi})}$$

وعند تعويض $\hat{\alpha}(\lambda)$ في المعادلة نحصل على: (محمد، 2011: 6-7)

$$g(\lambda)=L(\hat{\alpha}(\lambda),\lambda)=C-nL_n\sum_{i=1}^{n}(-L_n(1-e^{-\lambda xi}))$$

$$+ nL_n(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} L_n(1-e^{-\lambda xi}) - \lambda \sum x_i$$

ويمكن الحصول على مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة λ وسوف نرمز له بالرمز $\hat{\lambda}_{mLE}$ من خلال تعظيم المعادلة اعلاه نسبة إلى λ وبالاتحاد على حل يسمى طريقة النقطة الثابتة (Fixed Method) لحل المعادلة:

(الساعدي، 2007: 56)

h(λ) = λ

إذ إن:

$$h(\lambda) = \left[\frac{\sum_{i=1} \left(\frac{x_i e^{-\lambda xi}}{(1-e^{-\lambda xi})} \right)}{\sum_{i=1}^{n} L_n(1-e^{-\lambda xi})} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{(1-e^{-\lambda xi})} \right) \right]^{-1}$$

وبتعويض مقدر الإمكان الأعظم $\hat{\lambda}_{mLE}$ في المعادلة نحصل على مقدر $\hat{\alpha}_{mLE}$ وكالآتي:-

$$\hat{\alpha}_{mLE} = \hat{\alpha}(\hat{\lambda}_{mLE}) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} L_n(1-e^{-\hat{\lambda}_{mLE}\, x_i})}$$

ثانياً- طريقة بيز Bayes Estimation Way:

ويمكن تقدير المعلمات بطريقة بيز عندما تكون المعلمات مجهولة، أي إن كلا المعلمتين (λ), (α) مجهولتين.

يتبع المعلمتين (λ), (α) توزيع كاما (Gamma Prior Distribution).

$\pi_1(\lambda)\ \alpha\ \lambda^{b-1}e^{-\alpha\lambda}\quad , \lambda > 0$

$\pi_2(\lambda)\ \alpha\ \alpha^{d-1}e^{-\alpha\lambda}\quad , \alpha > 0$

علماً إن كل المعلمات الفوقية (a, b, c, d) هي معلومة (known) وغير سالبة (non-negative).

الآن افترض أن $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ هي عينة عشوائية لـ GE(α, λ)، إذاً ستكون دالة الإمكان الأعظم كالآتي:-

$$L\,(\text{data}\,|\alpha, \lambda) = \alpha^n \lambda^n e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1}$$

دالة الشروط السابقة لـ λ, α يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$L\,(\alpha, \lambda|\,\text{data}) = \frac{L(data\,|\,\alpha,\lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha)}{\int_o^\infty\int_o^\infty L(data\,|\,\alpha,\lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha)d\alpha d\lambda}$$

لذلك يكون مقدر بيز لأي دالة لـ λ, α ويكتب g(α, λ) تحت دالة الخسارة (squared error loss) هي: (الساعدي، 2007: 57)

$$\hat{g}_{\beta} = E_{\alpha,\lambda|data}(g(\alpha,\lambda)) = \frac{\int\limits_{o}^{\infty}\int\limits_{o}^{\infty} g(\alpha,\lambda)L(data\,|\,\alpha,\lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha)d\alpha d\lambda}{\int\limits_{o}^{\infty}\int\limits_{o}^{\infty} L(data\,|\,\alpha,\lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha)d\alpha d\lambda}$$

ولصـعوبة حـل المعادلـة اعـلاه يمكـن الاعتمـاد علـى طريقـة تسـمى (تقريـب لنـدلي) .(Lindley's Approximation)

وبالتالي سيكون تقدير بيز لـ α ,λ تحت دالة مربع الخسارة هو:-

$$\hat{\alpha}_{\beta} = \hat{\alpha} + \frac{1}{2}\left[\frac{2n}{\hat{\alpha}^3}\tau_{11}^2 + \left(\frac{2n}{\hat{\lambda}^3} + (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3 e^{-\hat{\lambda}x_i}(1+e^{-\hat{\lambda}x_i})}{(1-e^{-\hat{\lambda}x_i})^3}\right)\tau_{21}\tau_{22}\right.$$

$$\left. -\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 e^{-\hat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\hat{\lambda}x_i})^2}\right)(\tau_{22}\tau_{11} + 2\tau_{21}^2\right] + \left(\frac{d-1}{\hat{\alpha}} - c\right)\tau_{11}^2\left(\frac{b-1}{\hat{\lambda}} - a\right)\tau_{12}$$

$$\hat{\lambda}_{\beta} = \hat{\lambda} + \frac{1}{2}\left[\frac{2n}{\hat{\alpha}^3}\tau_{12}\tau_{11} + \left(\frac{2n}{\hat{\lambda}^3} + (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3 e^{-\hat{\lambda}x_i}(1+e^{-\hat{\lambda}x_i})}{(1-e^{-\hat{\lambda}x_i})^3}\right)\tau_{22}^2\right.$$

$$\left. -\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{3x_i^2 e^{-\hat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\hat{\lambda}x_i})}\right)(\tau_{22}\tau_{21}\right] + \left(\frac{d-1}{\hat{\alpha}} - c\right)\tau_{21}\left(\frac{b-1}{\hat{\lambda}} - a\right)\tau_{22}$$

علماً ان:

$$\tau_{11} = \frac{w}{uw-v^2}, \tau_{12} = \frac{v}{uw-v^2} = \tau_{21}, \tau_{22} = \frac{u}{uw-v^2}$$

$$u = \frac{n}{\hat{\alpha}^2}, v = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i e^{-\hat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\hat{\lambda}x_i})}, w = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} + (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 e^{-\hat{\lambda}x_i}}{(1-e^{-\hat{\lambda}x_i})^2}$$

ثالثاً- طريقة العزوم (M.E) Method of Moments:

تتميز طريقة العزوم بسهولتها فهي تعتمد على فرضية مساواه عزوم المجتمع μ_n مع عزوم العينة m_n وحل المعادلات لإيجاد تقديرات للمعلمات ، وحيث إن العزم الأول والثاني لتوزيع رايلي هو:

$$\mu_1 = E(t) = \beta\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \alpha$$

$$\mu_2 = E(t^2) = 2\beta^2 + \sqrt{2\pi}\alpha\beta + \alpha^2 ،$$

أي إن التباين سيكون:

$$V(t) = E(t^2) - [E(t)]^2 = \beta^2(2 - \frac{\pi}{2})$$

ومن خلال مساواة عزم العينة الأول والثاني مع عزم المجتمع الأول والثاني على التوالي ، نحصل على:

$$\bar{t} = \alpha^{\wedge} + \beta^{\wedge}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$S^2 = \beta^{\wedge^2}(2 - \frac{\pi}{2})$$

المقدر للمعلمة β سيكون كالأتي:

$$\beta^{\wedge}{}_{M.E} = \frac{S}{\sqrt{(2 - \frac{\pi}{2})}}$$

وبتعويض $\beta^{\wedge}{}_{M.E}$ نحصل على مقدر للمعلمة α كالأتي:

$$\alpha^{\wedge}{}_{M.E} = \bar{t} - \beta^{\wedge}{}_{M.E}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

وبذلك فان مقدر دالة المعولية سيكون كالأتي:

$$R^{\wedge}{}_{M.E}(t) = \exp[-(t - \alpha^{\wedge}{}_{M.E})^2 / 2\beta^{\wedge}{}_{M.E}]$$

توزيع ويبل ذو معلمة واحدة:

إن توزيع ويبل ذو المعلمة الواحدة هو في الحقيقة حالة خاصة من توزيع ويبل ذي المعلمتين. إذ يكون الـpdf لتوزيع ويبل ذي المعلمتين كالآتي:

$$f\ (t, \beta, \eta) = \beta/\eta(t/\eta)^{\beta-1}\ e^{(t/\eta)\beta}$$

حيث:

f: pdf (دالة كثافة الاحتمالية)

β: معلمة الشكل

η: معلمة القياس

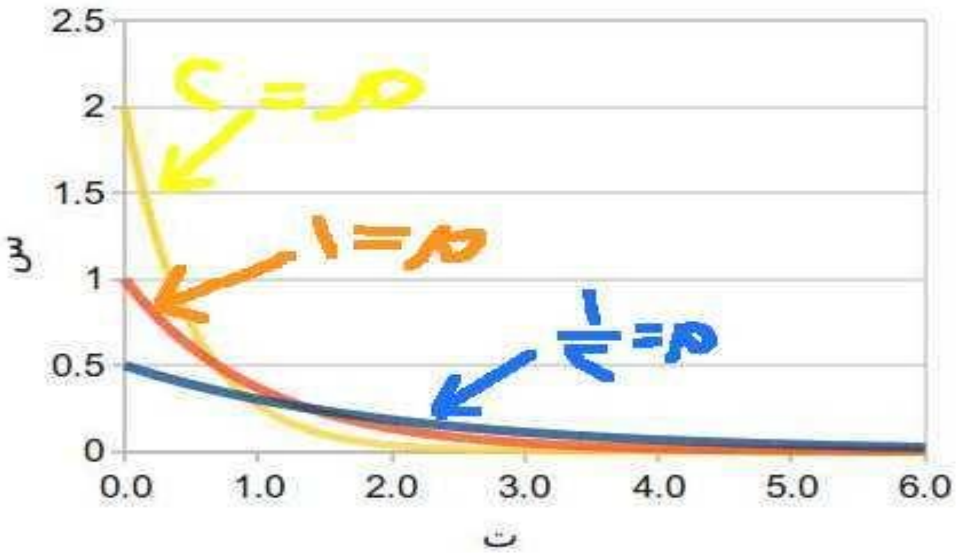
فإن كانت قيمة β معلومة (مثلاً، بفرض أن β قيمتها 1.5)، إذاً يصبح توزيع ويبل ذو المعلمتين توزيعاً ذا معلمة واحدة حيث تتم الحاجة إلى تقدير قيمة η فقط.

<u>أمثلة:</u>

مثال (1):

افترض أن معدل حدوث عطل في ماكينة ما هو مرة واحدة في الشهر ونريد معرفة احتمالية أن تكون الفترة الزمنية بين عطلين هي بين أسبوع وأسبوعين. يمكننا أن نستخدم الحاسوب فنحسب احتمالية أن تكون الفترة الزمنية أقل من أسبوع (0.21) ثم أقل من أسبوعين (0.37) ثم نطرح النتيجتين فنحصل على 0.16 أي 16%.

كيف يؤثر تغير معدل حدوث الأعطال أو وصول العملاء أو زمن الخدمة على شكل هذا المنحنى؟ الشكل التالي يبين ثلاثة منحنيات تمثل كل منها قيمة مختلفة لمعدل الوصول فهي على التوالي 0.5، 1 ، 3. دعنا نقارن احتمالية أن يطول الفاصل بين وصول عميلين عن 2. باستخدام الحاسوب نحسب احتمالية أن يقل الزمن عن 2 لكل منحنى فنحصل على 0.63، 0.86 0.95 على التوالي. ولكننا نريد احتمالية أن يطول الفاصل عن 2 وليس أن يقل عن 2. لذلك نطرح كل قيمة من 1 فنحصل على 0.37، 0.14، 0.05 أي 37%، 14%، 5%.



مثال (2):

افترض إجراء اختبار الحياة وكانت مجموعة البيانات مقدمة في جدول بيانات الفشل أدناه:

العدد في الحالة	حالة F أو S	الزمن النهائي للحالة
1	F	1180
1	F	1842
16	S	2000

توجد هناك حالتان للفشل فقط في الجدول. فإن أُستخدم توزيع ويبل ذا المعلمتين، فإن قيمة β المقدرة ستكون 3.378 وقيمة η ستكون 3763.573.

الفصل الثالث

الجانب العملي لتوزيع ويبل ذو معلمه واحدة

سوف ندرس في هذا الفصل اشتقاق توزيع ويبل لمعلمه واحده بطريقتين طريقة Maximum Likellyhood وطريقة Moment وفي هذا الفصل سنقوم بتطبيق دالة ويبل ذو معلمه واحده

$$f(t)=\left(\frac{c}{\gamma}\right)\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{c}} \qquad t\geq 0 \quad ,\gamma > 0$$

mean

$E(t)=\gamma$

Variance

$Var(t)=\gamma^{2}\,[\Gamma(1+2/c) - (\Gamma(1+1/c))^{2}]$

f(t)=(c/ɣ) (t/ɣ)^(c-1) e^(⟦-(t/ɣ)⟧^c) t≥0

$$L=\prod_{i=1}^{n} f(ti) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{c}{\gamma}\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c}}\right] = \frac{c}{\gamma}\left(\frac{t1}{\gamma}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{t1}{\gamma}\right)^{c}} \cdots \cdots \frac{c}{\gamma}\left(\frac{tn}{\gamma}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{tn}{\gamma}\right)^{c}} = \left(\frac{c}{\gamma}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c-1} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c}}$$

$$LnL=Ln\left[\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{n} \frac{\prod_{i=1}^{n}(ti)^{c-1}}{\gamma^{(c-1)n}} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c}}\right] = Ln\left[\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{n} \gamma^{-n(c-1)} \prod_{i=1}^{n}(ti)^{c-1} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ti}{\gamma c}\right)^{c}}\right] = n\, Ln\frac{c}{\gamma} - n(c-1)Ln\gamma + \sum_{i=1}^{n}(ti)^{c-1} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c}$$

$$\frac{c}{\gamma} - n(c-1)Ln\gamma + \sum_{i=1}^{n}(ti)^{c-1} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ti}{\gamma}\right)^{c}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \gamma} = \frac{-n}{\gamma} - n(c-1) * \frac{1}{\gamma} + 0 - \frac{c\sum_{i=1}^{n} ti^{c}}{\gamma^{c+1}} = \frac{-n}{\gamma} - \frac{n(c-1)}{\gamma} - \frac{c\sum_{i=1}^{n} ti^{c}}{\gamma^{c+1}}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \gamma} = 0 \rightarrow \frac{-n}{\hat{\gamma}} - \frac{n(c-1)}{\hat{\gamma}} - \frac{c\sum_{i=1}^{n} ti^{c}}{\hat{\gamma}^{c+1}} = 0$$

$$\frac{-n-n(c-1)}{\hat{\Upsilon}}=\frac{c\sum_{i=1}^{n} ti^{c}}{\hat{\Upsilon}^{c+1}} \rightarrow \frac{-n-nc+n}{\hat{\Upsilon}}=\frac{c\sum_{i=1}^{n} ti^{c}}{\hat{\Upsilon}^{c+1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ti^{c}=-\mathrm{n}\Upsilon^{c+1}\Upsilon^{-1}$$

طريقة Moment

$$f(t,\Upsilon)=\frac{c}{\Upsilon}\left(\frac{t}{\Upsilon}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{t}{\Upsilon}\right)^{c}}$$

$$E(t)=\Upsilon$$

$$\Gamma(2)=(2-1)!=1$$

$$\because \frac{\sum_{i=1}^{n} ti}{n}=E(t)=\hat{\Upsilon}$$

$$\therefore \hat{\Upsilon}=\frac{\sum_{i=1}^{n} ti}{n}=\bar{t}$$

سوف نقوم بتطبيق دالة ويبل ذو معلمه واحده على المثال ادناه بطريقتين MLE و ME على البيانات المذكوره في المثال ثم نقوم باجراء مقارنه بين الطريقتين بعد استخراج دالة Pdf ودالة CDF

t=(11.99,1.94,11.8,1.3,22.65,4.88,6.01,2.68,4.42,12.01,2.13,0,16,0.95,4.86)

سوف نقوم بحل المثال بطريقه MLE

دالة Pdf

$$f(t)=\frac{c}{\Upsilon}\left(\frac{t}{\Upsilon}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{t}{\Upsilon}\right)^{c}}$$

$$\hat{\Upsilon}=\frac{\sum_{i=1}^{n} ti}{n}=\bar{t}=6.27 \qquad ,c=1$$

$$f(t_1)=\frac{1}{6.27}\left(\frac{11.99}{6.27}\right)^{0} * e^{-\left(\frac{11.99}{6.27}\right)^{1}}=0.159489633\, e^{-1.912280702}=0.023563483$$

$$f(t_2)=0.159489633 * e^{-\left(\frac{1.94}{6.27}\right)}=0.159489633 * 0.733879899=0.117046235$$

$f(t_3)$=0.159489633*0.15228863=0.024288457

$f(t_4)$=0.159489633*0.812746096=0.129624576

$f(t_5)$=0.159489633*0.026985915=4.30397368*10^{-3}

$f(t_6)$=0.159489633*0.459181643=0.073234711

$f(t_7)=0.159489633*0.383455119=0\ .061157116$
$f(t_8)=0.159489633*0.652181608=0.104016205$
$f(t_9)=0.159489633*0.1472722525=0.02348844$
$f(t_{10})=0.159489633*0.852727475=0.136001192$
$f(t_{11})=0.159489633*0.7119774688=0.113552581$
$f(t_{12})=0.159489633*0.974804499=0.155471211$
$f(t_{13})=0.159489633*0.859404861=0.137066165$
$f(t_{14})=0.159489633*0.460648676=0.073468688$

CDF دالة

$F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{c}}$

$\hat{\theta}=\bar{t}=\frac{\sum_{i=1}^{n} ti}{n}=6.27$

$F(t_1)= 1-e^{-\left(\frac{11.99}{6.27}\right)}=0.852256956$
$F(t_2)=1-e^{-\left(\frac{1.94}{6.27}\right)}=0.92661201$
$F(t_3)=1-e^{-\left(\frac{11.8}{6.27}\right)}=0.84771137$
$F(t_4)=1-e^{-\left(\frac{1.3}{6.27}\right)}=0.187253904$
$F(t_5)=1-e^{-\left(\frac{22.65}{6.27}\right)}=0.973014085$
$F(t_6)=1-e^{-\left(\frac{4.88}{6.27}\right)}=0.540818357$
$F(t_7)=1-e^{-\left(\frac{6.01}{6.27}\right)}=0.616544881$
$F(t_8)=1-e^{-\left(\frac{2.68}{6.27}\right)}=0.347818392$
$F(t_9)=1-e^{-\left(\frac{4.42}{6.27}\right)}=0.852727475$
$F(t_{10})=1-e^{-\left(\frac{12.01}{6.27}\right)}=0.852727475$
$F(t_{11})=1-e^{-\left(\frac{2.13}{6.27}\right)}=0.288025312$
$F(t_{12})=1-e^{-\left(\frac{0.16}{6.27}\right)}=0.025195501$
$F(t_{13})=1-e^{-\left(\frac{0.95}{6.27}\right)}=0.140595139$
$F(t_{14})=1-e^{-\left(\frac{4.86}{6.27}\right)}=0.539351324$

الان سوف نقوم بحل المثال بطريقه Moment

Pdf دالة

$f(t_1)=$
$\frac{1}{6.27}\left(\frac{11.99}{6.27}\right)^{0} e^{-\left(\frac{11.99}{6.27}\right)^{1}} = 0.159489633 * e^{-1.912280702} = 0.023563483$
$f(t_2)$

$= 0.159489633 * e^{-\left(\frac{1.94}{6.27}\right)} = 0.159489633 * 0.733879899 = 0.117046235$
$f(t_3)=0.159489633*0.15228863=0.024288457$
$f(t_4)=0.159489633*0.812746096=0.129624576$
$f(t_5)=0.159489633*0.026985915=4.30397368*10^{-3}$
$f(t_6)=0.159489633*0.459181643=0.073234711$
$f(t_7)=0.159489633*0.383455119=0 .061157116$
$f(t_8)=0.159489633*0.652181608=0.104016205$
$f(t_9)=0.159489633*0.1472722525=0.02348844$
$f(t_{10})=0.159489633*0.852727475=0.136001192$
$f(t_{11})=0.159489633*0.7119774688=0.113552581$
$f(t_{12})=0.159489633*0.974804499=0.155471211$
$f(t_{13})=0.159489633*0.859404861=0.137066165$
$f(t_{14})=0.159489633*0.460648676=0.073468688$

C.D.F دالة

$F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{c}}$
$\hat{\theta} = \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} ti}{n} = 6.27$
$F(t_1)=1- e^{-\left(\frac{11.99}{6.27}\right)} = 0.852256956$
$F(t_2)=1-e^{-\left(\frac{1.94}{6.27}\right)} = 0.92661201$
$F(t_3)=1-e^{-\left(\frac{11.8}{6.27}\right)} = 0.84771137$
$F(t_4)=1-e^{-\left(\frac{1.3}{6.27}\right)} = 0.187253904$
$F(t_5)=1-e^{-\left(\frac{22.65}{6.27}\right)} = 0.973014085$
$F(t_6)=1-e^{-\left(\frac{4.88}{6.27}\right)} = 0.540818357$
$F(t_7)=1-e^{-\left(\frac{6.01}{6.27}\right)} = 0.616544881$
$F(t_8)=1-e^{-\left(\frac{2.68}{6.27}\right)} = 0.347818392$
$F(t_9)=1-e^{-\left(\frac{4.42}{6.27}\right)} = 0.852727475$
$F(t_{10})=1-e^{-\left(\frac{12.01}{6.27}\right)} = 0.852727475$
$F(t_{11})=1-e^{-\left(\frac{2.13}{6.27}\right)} = 0.288025312$
$F(t_{12})=1-e^{-\left(\frac{0.16}{6.27}\right)} = 0.025195501$
$F(t_{13})=1-e^{-\left(\frac{0.95}{6.27}\right)} = 0.140595139$

$F(t_{14})=1-e^{-\left(\frac{4.86}{6.27}\right)} = 0.539351324$

الاستنتاجات :

بعد تطبيق البيانات المذكوره في المثال المعطى في الفصل الرابع حصلنا على النتائج التاليه وذلك بعد تطبيق طريقتي MLE و ME.ثم قمنا بالمقارنه بين الطريقتين اعتمادا على نتائج داله PdfوCDFفكانت النتائج متطابقه بالنسبه للطريقتين وبالنسبه لتوزيع ويبل ذو معلمه واحده .ونعتقد بأن النتائج ستكون مختلفه عند استخدام توزيع اخر لتوزيع ويبل ذو اكثر من معلمه واحده.

المصادر

أولاً- المصادر العربية:

1. جلوب، إسماعيل هادي، وشفيق، بلسم مصطفى، مقارنة بعض طرائق التقدير البيزية مع طرائق أخرى لتوزيع ريلي لبيانات تحت المراقبة بين النوع الاول باستخدام المحاكاة، مجلة الإدارة والاقتصاد، السنة 36، العدد 97، 2013.

2. الساعدي، سلام جاسم محمد، إشتراك توزيعي ويبل وتكوين توزيع الباي ويبل، رسالة ماجستير مقدمة إلى كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 2007.

3. علي، سوسن صبيح عبد، وفندي، صالح جعفر، ومطلك، ستار عبد، قياس معولية الفرن الدوار في معمل سمنت كبيسة، مجلة الهندسة والتكنولوجيا، المجلد 27، العدد 11، 2009.

4. محمد، نشأت جاسم، مقارنة طرائق محورة لتقدير دالة المعولية لتوزيع رايلي بمعلمتين باستخدام المحاكاة ، بغداد- العراق، 2011.

ثانياً- المصادر الأجنبية:

5. Broberg, K.B. (1997). H.P. Rossmanith, ed. Fracture Research in Retrospect: An anniversary volume in honour of G.R. Irwin's 90th birthday. CRC Press. p. 142.

6. Afify, E.E.,(2004),"Comparison of Estimators of Parameters for the Rayleigh Distribution", Faculty of Eng. Shibeen El Kom Menoufia Univ.

7. Abd-Eiaziz,A.A., Amin,E.A. and Sdiman,A.,(2010), "Estimation and Predication from inverse Rayleigh distribution based on lower record values "Applied Mathematical sciences, vol.4, no.62, pp 3057-3066.

8. Al-Nachawati,H. and Abu-Youssef,S.E.,(2009),"A Bayesian analysis of order statistics from the Generalized Rayleigh distribution ",Applied Mathematical sciences,vol.3,no.27,pp 1315-1325.

9. Chen, D.G., Lio,Y.L. and Tsai,T.R.,(2011),"Parameter Estimation for Generalized Rayleigh distribution under progressively type-I interval censored data', American open journal of statistics pp 46-57.

10. Kumar, A., Singh, S. and Gupta, V.K., (2011),"N-Rayleigh distribution in mobile computing for flat –fading channel", Global journal of computer science and technology ,vol.11 issue(14) version 1.0.

11. Sanku Dey and Tanujit "Dey Rayleigh Distribution Revisited Via Extension of Jeffrey's prior in formation and new loss function rev stat ", Statistical Journal Volume 9, Number 3, November 2011, 213–226.

الإهداء

إلى من تعب جبينه ولهج لسانه بالدعاء.......... أبي

إلى من سهر الليالي وغمرتني بحنانها .... أمي

إلى من ناصروني بصعوبة أيامي .... إخوتي وأخواتي

إلى من احتضنتني من كل برد وأسكنتني .... مدينتي

إلى أساتذتي حباً وامتناناً

إلى الأستاذة المشرفة الفاضلة الست شيماء اعتزازاً وتقديراً

اعتماد

بسم الله الرحمن الرحيم

((قَالَ رَبِّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي، وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي، وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِّن لِّسَانِي، يَفْقَهُوا قَوْلِي))

صدق الله العليّ العظيم

سورة طه/الآيات 25–28

المحتويات